SYNTHETISK BEVIS

FOR

EN MEGET SMUK EGENSKAB

VED

PARABOLEN.

VED

C. F. DEGEN,

DR. PHIL. OG PROF. ORD. I MATHEMATIKEN.

Fig. 1.

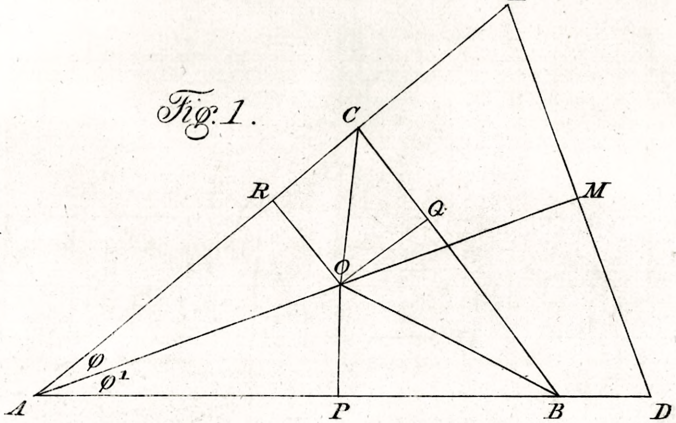
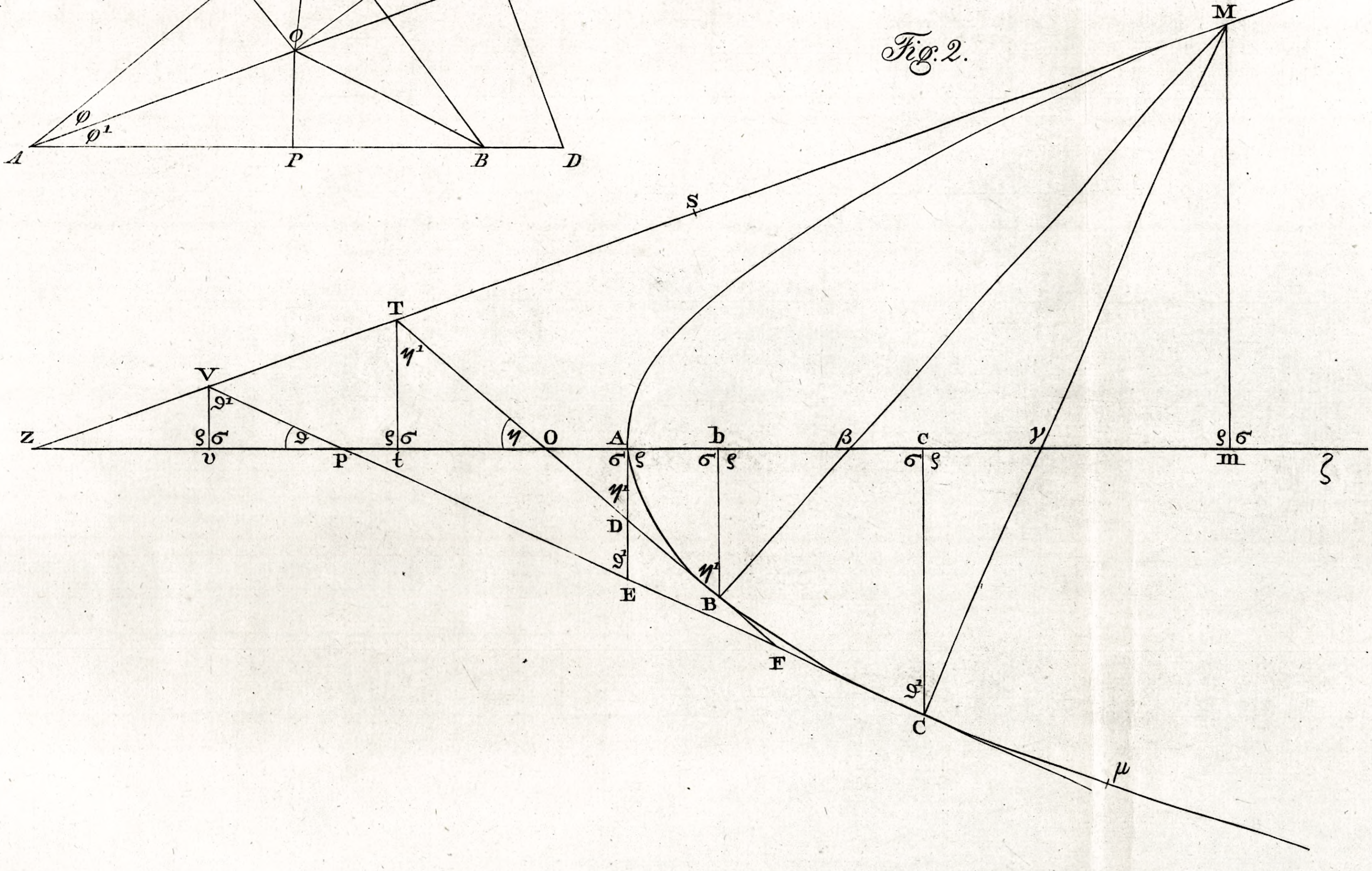


Fig. 2.



Læresætning.

(Fig. 2.) *Fra tvende givne, ubevægelige Punkter udgaae tvende bevægelige Punkter D, E, efter givne Retninger DT, EV og med givne Hastigheder, saaledes at de til samme Tid ere i T og V. DT og EV have altsaa det samme uforanderlige Forhold til hinanden, som de givne Hastigheder. Dette forudsat, paastaaer jeg, at VT forlænget stedse vil beröre en vis Parabole, som ogsaa ED forlænget berörer.*

For at beviſe dette maa jeg forudſkikke tvende Laaneſætninger, der ſelv indeholde ſmukke, ſkjöndt mindre bekjendte Egenſkaber ved denne krumme Linie.

Förste Laanesætning.

MAμ *er en Parabole som etsteds, f. Ex. i A, beröres af Tangenten ADE. Den til Punkten A hörende Diameter være Z*ζ*, og Bb, Mm tvende til denne Diameter hörende Ordinater. Forbindes nu disses Endepunkter B og M ved en ret Linie BM, som skjærer Diameteren ZA*ζ *i* β*, saa er A*β *Middelproportionalen imellem Ab og Am, eller* $Ab : A\beta = A\beta : Am$.

Bevis.

1) Da Ordinaterne ere parallele med Tangenten, saa ere Vexelvinklerne ϱ, ϱ ligestore, som og $bB\beta = mM\beta$, altsaa $\triangle\, bB\beta \sim \triangle\, mM\beta$.

2) Deraf fölger

$$Mm^2 : Bb^2 = \beta m^2 : \beta b^2, \text{ d. e.}$$
$$Am : Ab = \beta m^2 : \beta b^2.$$

3) Da saaledes $Am.\ \beta b^2 = Ab.\ \beta m^2$ eller

$$Am.\ [A\beta - Ab]^2 = Ab.\ [Am - A\beta]^2, \text{ erholdes}$$

4) $Am.\ A\beta^2 - 2Am.\ A\beta.\ Ab + Am.\ Ab^2$
$= Ab.\ Am^2 - 2Ab.\ Am.\ A\beta + Ab.\ A\beta^2$ eller

5) $Am.\ A\beta^2 + Am.\ Ab^2 = Ab.\ Am^2 + Ab.\ A\beta^2$; altsaa

6) $(Am - Ab).\ A\beta^2 = Ab.\ Am^2 - Am.\ Ab^2 = Am.\ Ab.\ [Am - Ab]$.

7) Fölgelig $\left.\begin{array}{l} A\beta^2 = Ab.\ Am, \\ \text{ɔ: } Ab : A\beta = A\beta : Am. \end{array}\right\}$ Hv. sk. b.

Anden Laanesætning.

Naar der fra Skjæringspunkten T, hvor Tangenterne BT og MT stöde sammen, drages en med Tangenten AE parallel Linie Tt, saa siger jeg, at $At = A\beta$.

Bevis.

1) $Zt^2 : Zm^2 = Tt^2 : Mm^2$

2) $bO^2 : Ot^2 = bB^2 : Tt^2$ og

3) $Zm : bO = Mm^2 : bB^2$, fordi $Zm = 2Am$ og $bO = 2Ab$.

4) Forbindes Proportionerne i 1, 2, 3 ved at multiplicere dem Led for Led med hinanden, erholdes

$$Zm.\ bO^2.\ Zt^2 = bO.\ Ot^2\ Zm^2$$

eller $bO.\ Zt^2 = Zm.\ Ot^2$. Altſaa er

5) $Zm : bO = Zt^2 : Ot^2$; d. e. ifölge (3)

6) $Mm : bB = Zt : Ot$ eller og

7) $\beta m : \beta b = Zt : Ot$. Heraf fölger

8) $\beta m + \beta b : \beta b. = Zt + Ot : Ot$. Nu er

9) $Zt + Ot = ZO = AZ - AO = Am - Ab = mb = \beta m + \beta b$;

10) Fölgelig har man $\beta b = Ot$. Da desuden

11) . . . . . . $Ab = AO$, findes

12) $Ab + b\beta = AO + Ot$, d. e. $A\beta = At$. Hv. ſk. b.

Læresætning.

Paa Parabolen tages tvende uforanderlige Punkter B og C. Foruden diſſe drages igjennem en vilkaarlig 3die Punkt A en Diameter $ZA\zeta$ og en Tangente ADE, ſom ſkjærer de igjennem B og C dragne Tangenter i D og E; ſamt igjennem en vilkaarlig 4de Punkt M en Tangente MZ, (ſom ſkjærer de igjennem B og C trukne i T og V) og tvende Chorder MB og MC. Dette forudſat, ſiger jeg, at ſaavel *Forholdet* $A\beta : A\gamma$, *ſom Forholdet DT: EV er et uforanderligt Forhold; ſaalænge nemlig A, B, C ikke forandres, i hvor end M tages.*

Bevis.

$$\left.\begin{array}{l} \text{I.}\quad A\beta^2 = Ab.\ Am \\ \text{og}\ A\gamma^2 = Ac.\ Am \end{array}\right\}\ \text{ifölge Laaneſ. I.}$$

Altſaa er $A\beta^2 : A\gamma^2 = Ab : Ac = Bb^2 : Cc^2$
eller $A\beta : A\gamma = Bb : Cc.$

Men $Bb : Cc$ ere uforanderlige Störrelſer; altſaa er ogſaa $A\beta : A\gamma$ et uforanderligt Forhold.

Hvilket var det Förste.

II. $\left.\begin{array}{l} \text{Da } DT = \dfrac{At.\ \sin\sigma}{\sin\eta^{1}} \\ \text{og } EV. = \dfrac{Av.\ \sin\sigma}{\sin\vartheta^{1}} \end{array}\right\}$ har man

$DT : EV. = At.\ \text{coſec.}\ \eta^{1} : Av.\ \text{coſec.}\ \vartheta^{1}$

Men iſölge Laaneſ. 2. er $At = A\beta$ og $Av = A\gamma$; altſaa

$DT : EV = A\beta.\ \text{coſec.}\ \eta^{1} : A\gamma.\ \text{coſec.}\ \vartheta^{1}$

$= Bb.\ \text{coſec.}\ \eta^{1} : Cc.\ \text{coſec.}\ \vartheta^{1} = AD.\text{coſec.}\ \eta^{1} : AE.\ \text{coſec.}\ \vartheta^{1}$

fordi $Bb = 2\ AD$ og $Cc = 2\ AE.$

Hvoraf aabenbart fölger, at ogſaa $DT : EV$ er et uforanderligt Forhold, da η^{1} og ϑ^{1} ere uforanderlige Vinkler.

Hvilket var det Andet.

Tillæg. Da Tangenten igjennem enhver Punkt M ſaaledes paa tvende andre igjennem B og C dragne Tangenter afſkjærer Stykker DT og EV af et uforanderligt Forhold, ſaa er det klart at Punkterne T og V foreſtille de bevægelige Punkters ſamtidige Steder. Forlænges altſaa Tangenten TB til den ſkjærer Tangenten VC i F, ſaa ere ogſaa B og F ſamtidige Steder. Derved er altſaa fölgende Spörgsmaal beſvaret:

Naar fra tvende givne Punkter, D og E, efter tvende givne Retninger DT og EV, beſkrives rette Linier med eensformig Bevægelſe og alle ſamtidige Steder forbindes ved rette Linier, ſom forlængede ſkjære hinanden i en ſammenhængende Række af Punkter, hvilken Curve danne da diſſe?

Svaret bliver: en *Parabole*. Denne Paraboles Beliggenhed beſtemmes ved at forlænge de tvende Linier ED, TD og VE og beſkrive en Parabole, ſom berörer diſſe trende Linier.

Fremdeles oplöſes derved let Opgave:

Retningerne DT og EV beskrives af tvende Punkter med givne Hastigheder. Man forlanger den Stilling, i hvilken de tvende bevægede Punkter ere i lige Linie med en tredie Punkt S.

Har man nemlig tegnet den behörige Parabole, ſaa drage man igjennem S en Tangente til ſamme. Denne Tangente forlænget vil ſkjære de givne Retninger i de forlangte Punkter. Men en ſaadan Tangente kan drages paa tvende Maader, d. e. til tvende forſkjellige Sider. Altſaa kan Opgaven oplöſes paa tvende forſkjellige Maader; men flere Stillinger gives der ikke heller, ſom opfylde den foreſkrevne Betingelſe.

Endelig indſees ogſaa af det Beviſte fölgende ſmukke og almindelige Sætning:

Udgaaer der fra flere Punkter D, E, H, I &c., ſom ſamtlig ligge paa een og ſamme rette Linie, ligeſaamange bevægelige Punkter, efter forſkjellige Retninger og med forſkjellige Haſtigheder, da, derſom deres Haſtigheder forholde ſig ſom AD. coſec. η^{1}, AE. coſec. ϑ^{1}, AG. coſec. i^{1}, AH. coſec. k^{1}. o. ſ. v. D. e. ſom Producterne af Diſtancerne fra den rette Linies og Parabolens fælles Beröringspunkt og Coſecanterne af Retningernes Inclinationer mod bemeldte rette Linie, da, ſiger jeg, maa de ſamtidige Steder, ſom Punkterne under deres Bevægelſe indtage, ſtedſe ligge i een og ſamme rette Linie.

Thi enhver Tangente fra Parabolen f. Ex. fra M, ſkjærer ſtedſe ethvert Par af de Retningerne foreſtillende Tangenter i tvende ſamtidige Steder, altſaa og ſamtlige Retninger ɔ: Tangenter i ſamtidige Steder.

Neppe vil den analytiſke Calcul viſe denne Sætnings Rigtighed uden megen Vidtlöftighed, og ſikkert ikke med den Simplicitet og Klarhed, ſom her fölger med den ſynthetiſke Betragtningsmaade.